Пряма через два ортоцентри

Хілько Данило Ігорович,
Ècole normale supèrieure de Paris

В 2014 році на Європейську олімпіаду для дівчат (EGMO 2014 [1]) автором запропоновано таку задачу (сформульовану нижче у вигляді теореми).

Теорема 1. *На сторонах AB та AC гострокутного трикутника ABC відмічено відмінні від вершин точки D та E відповідно так, що $DB = CE$. Прямі CD та BE перетинаються в точці F. Тоді ортоцентр трикутника BFC, ортоцентр трикутника EFD і середина M дуги BAC описаного кола трикутника ABC лежать на одній прямій*[1].

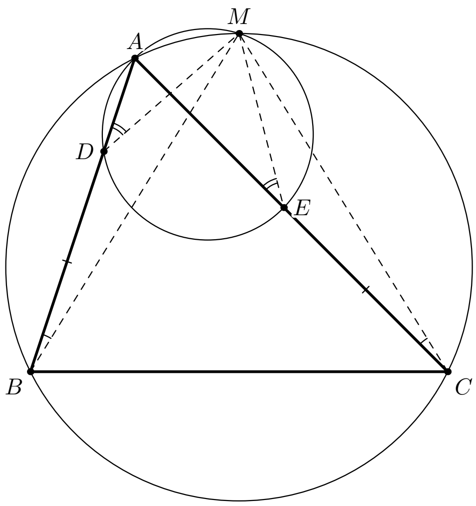

Рис. 1

Нам потрібна проста, але дуже важлива і корисна лема. Тут і надалі в формулюваннях лем, задач та тверджень будемо користуватися позначеннями, які введено раніше.

Лема 1. $DM = EM$.

Доведення. Маємо зі вписаних кутів $\angle MCA = \angle MBA$ (рис. 1). Оскільки M – середина дуги BAC, то $\angle MCB = \angle MBC$, тобто трикутник BMC рівнобедрений і $BM = MC$. Тоді трикутники CEM і BDM рівні, звідки $DM = EM$. □

Зауваження 1. До того ж, оскільки трикутники CEM і BDM рівні, то $\angle MEC = \angle MDB$, тобто $\angle ADM = \angle AEM$. Отже, точки A, M, E, D лежать на одному колі.

Цю лему можна перекласти «фізико-зоологічною» мовою: якщо з вершин B і C одночасно починають рух дві комахи, що рухаються по відрізках BA та CA у бік точки A з однаковими швидкостями, то в будь-який момент часу комахи будуть рівновіддаленими від точки M. До того ж, згідно із зауваженням, комахи, а також точки A, M належать одному колу. Ця мова і цей принцип дотичні до *методу лінійної неперервності в геометрії*, який дозволяє, застосувавши деяки загальні факти, довести твердження для загального випадку, перевіривши кілька часткових. Докладніше про цей метод можна дізнатися з матеріалів Ф. Івлева [2].

[1] Насправді, задача формулювалася трохи інакше: якщо $DB = BC = CE$, треба довести, що на одній прямій з ортоцентром трикутника EFD і точкою M лежить інцентр трикутника ABC. Читач може переконатися, що за цієї умови інцентр ABC збігається з ортоцентром BFC.

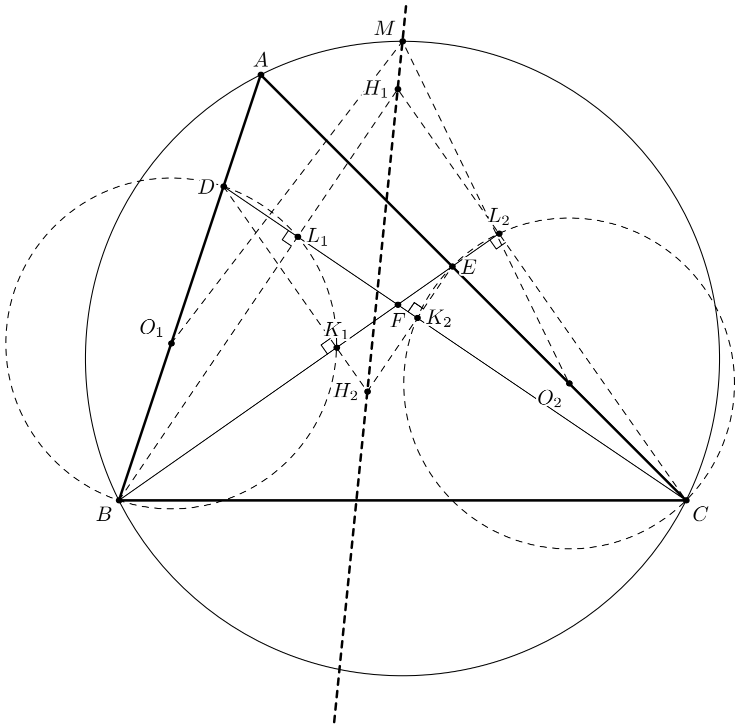

Рис. 2

Сюжет леми – мандрівний. Він часто з'являється в олімпіадних задачах, а за допомогою цієї леми, а також інших, на перший погляд, не надто вибагливих фактів можна розв'язати дуже складні геометричні задачі. Докладніше дивіться статтю А. Полянського [3], а також матеріали занять його гуртка [4]. Цю статтю також можна розглядати як подальше дослідження сюжету.

Для простоти викладу в усіх доведеннях будемо вважати, що точки розташовані саме так, як на відповідному рисунку. Хоча звичайно міркування можна узагальнити і на інші конфігурації.

Доведення теореми 1. Позначимо ортоцентри трикутників BFC та DFE через H_1 і H_2. Розглянемо кола ω_1 і ω_2, що побудовані на відрізках BD і CE відповідно як на діаметрах (рис. 2). Будемо доводити, що у кожної з точок H_1, H_2, M однаковий степінь відносно кіл ω_1 і ω_2. Тоді всі вони належать радикальній осі кіл ω_1 і ω_2, яка є прямою.

Нехай DK_1, EK_2 — висоти трикутника DFE; BL_1, CL_2 — висоти трикутника BFC. Тоді, оскільки $\angle DL_1B = \angle DK_1B = \angle CL_2E = \angle CK_2E = 90^\circ$, точки L_1, K_1 належать ω_1, а точки L_2, K_2 належать ω_2. Тоді степені точок можна записати так: $p(H_1, \omega_1) = H_1L_1 \cdot H_1B$, $p(H_1, \omega_2) = H_1L_2 \cdot H_1C$, $p(H_2, \omega_1) = H_2K_1 \cdot H_2D$, $p(H_2, \omega_2) = H_2K_2 \cdot H_2E$. З іншого боку, маємо $\angle DK_1E = \angle DK_2E = \angle BL_1C = \angle BL_2C = 90^\circ$, тому чотирикутники DK_1K_2E і BL_1L_2C вписані. Звідси $H_2K_1 \times H_2D = H_2K_2 \cdot H_2E$, $H_1L_1 \cdot H_1B = H_1L_2 \times H_1C$, а тому степені точки H_1, а також точки H_2, рівні відносно кіл ω_1 і ω_2. Тому H_1 і H_2 належать радикальній осі ω_1, ω_2.

Залишається показати, що точка M також належить радикальній осі ω_1, ω_2. Нехай O_1 і O_2 – центри ω_1 і ω_2 відповідно. Зрозуміло, що O_1 – середина BD, а O_2 – середина CE. Тоді $BO_1 = CO_2$, отже можна застосувати лему 1 для точок O_1 і O_2. За лемою $O_1M = MO_2$. Тоді $p(M, \omega_1) = MO_1^2 - O_1D^2 =$

$MO_1^2 - BD^2/4 = MO_2^2 - CE^2/4 = MO_2^2 - O_2C^2 = p(M, \omega_2)$. Отже, M також належить радикальній осі кіл ω_1 і ω_2. □

Наша мета – дослідити властивості прямої H_1H_2. Ми вже багато знаємо про одну з точок перетину H_1H_2 з описаним колом ABC – це середина дуги BAC. Що можна сказати про іншу точку?

Теорема 2. *Нехай пряма H_1H_2 вдруге перетинає описане коло ABC в точці T. Позначимо через A' точку, яка є симетричною до A відносно серединного перпендикуляра відрізка BC. Тоді точки T, H_2, F і A' лежать на одному колі.*

Для доведення теореми 2 нам потрібна підготовка.

Розглянемо коло ω із центром у точці M і радіусом MA. Очевидно, що ω проходить через A'. Згідно із зауваженням до леми 1, точки A, M, E, D лежать на одному колі. Позначимо його через γ. Нехай γ вдруге перетинає ω в точці Z, а пряма $A'Z$ вдруге перетинає γ в точці V.

Твердження 1. *Прямі AZ і DE паралельні, а точка V лежить на серединному перпендикулярі до відрізка BC.*

Доведення. Зрозуміло, що $MA = MZ$ (рис. 3). За лемою 1 $MD = ME$. Тоді маємо такі рівності менших дуг кола γ: $MA = MZ$, $MD = ME$. Тоді $AD = ZE$ як дуги, звідки маємо рівність відповідних відрізків. Це означає, що чотирикутник $DAZE$ — трапеція.

Запишемо $\angle AMV = \angle AZV = 180^\circ - \angle AZA' = 180^\circ - (180^\circ - \angle AMA'/2) = \angle AMA'/2$. Бачимо, що пряма MV є бісектрисою кута $\angle AMA'$. Оскільки $AM = MA'$, трикутник AMA' – рівнобедрений, а тому пряма MV є перпендикулярною до хорди AA' описаного кола ABC. Отже, MV – діаметр цього кола, тобто серединний перпендикуляр відрізка BC,

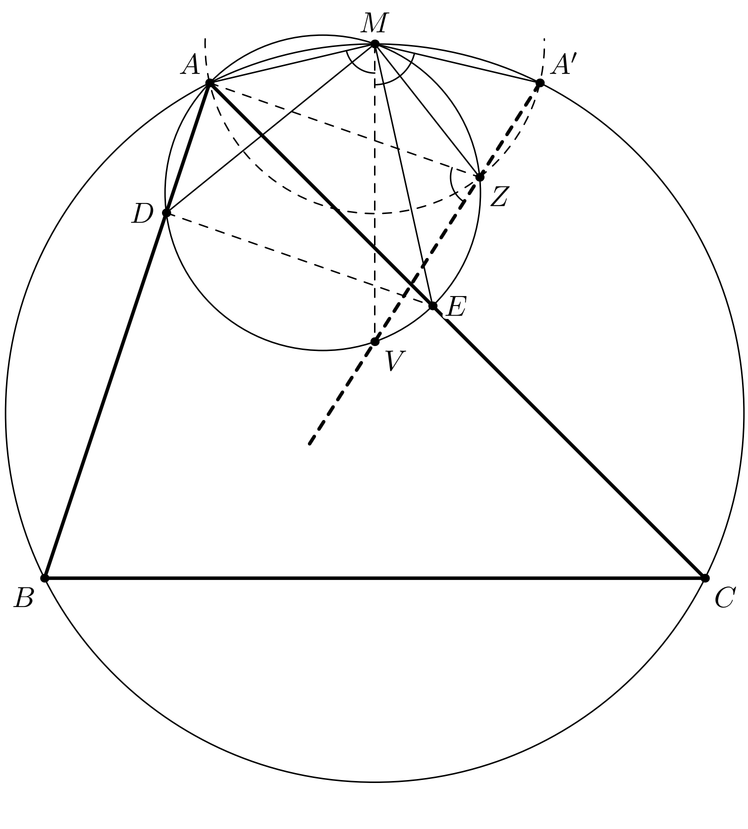

Рис. 3

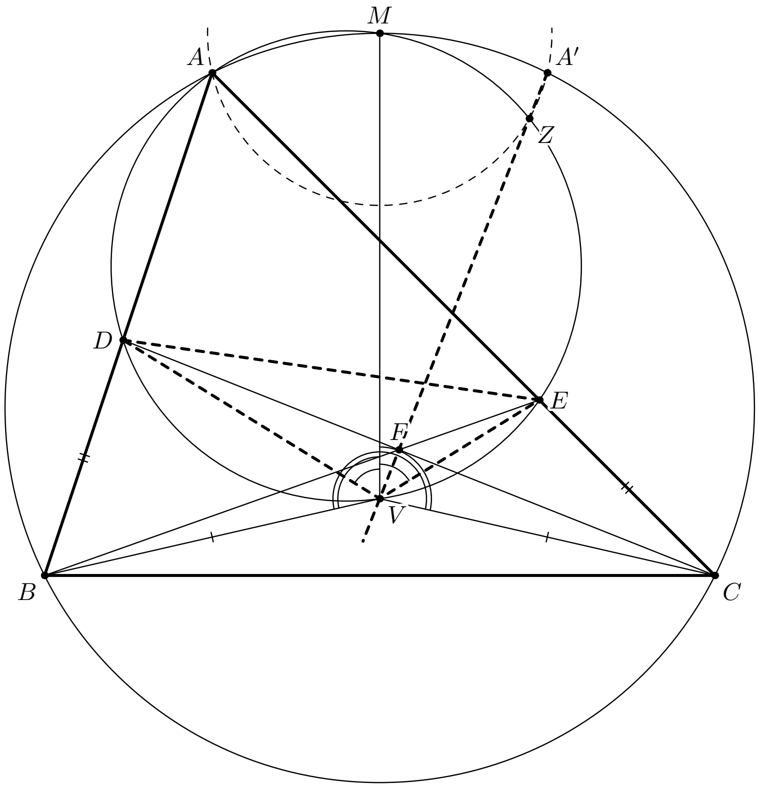

Рис. 4

бо уже доведено, що M належить цьому серединному перпендикуляру. □

Наступний факт є ключовим для доведення задачі 2, хоча він дуже цікавий і сам по собі.

Твердження 2. *Точка F належить прямій $A'Z$.*

Доведення. Будемо доводити, що точка F належить прямій VZ (рис. 4). Для цього застосуємо кутову форму оберненої теореми Чеви до трикутника DVE і прямих DC, EB, VZ. За кутовою формою оберненої теореми Чеви достатньо показати, що

$$\frac{\sin\angle EDC}{\sin\angle CDV}\cdot\frac{\sin\angle DVZ}{\sin\angle ZVE}\cdot\frac{\sin\angle VEB}{\sin\angle BED}=1.$$

За твердженням 1 $DAZE$ – трапеція, тому, згідно із теоремою синусів,

$$\frac{\sin\angle DVZ}{\sin\angle ZVE}=\frac{DZ}{ZE}=\frac{AE}{AD}.$$

Далі застосуємо теорему синусів для трикутників DEC і DVC:

$$\frac{\sin\angle EDC}{CE}=\frac{\sin\angle DEC}{CD},$$
$$\frac{\sin\angle VDC}{VC}=\frac{\sin\angle DVC}{DC},$$

звідки

$$\frac{\sin\angle EDC}{\sin\angle CDV}=\frac{CE}{VC}\cdot\frac{CD\cdot\sin\angle DEC}{CD\cdot\sin\angle DVC}=$$
$$=\frac{\sin\angle DEC\cdot CE}{\sin\angle DVC\cdot VC}.$$

Аналогічно із трикутників DEB і BEV

$$\frac{\sin\angle DEB}{BD}=\frac{\sin\angle BDE}{BE},$$
$$\frac{\sin\angle VEB}{VB}=\frac{\sin\angle BVE}{BE},$$

звідки

$$\frac{\sin\angle VEB}{\sin\angle BED}=\frac{VB}{BD}\cdot\frac{BE\cdot\sin\angle BVE}{BE\cdot\sin\angle BDE}=$$
$$=\frac{\sin\angle BVE\cdot VB}{\sin\angle BDE\cdot BD}.$$

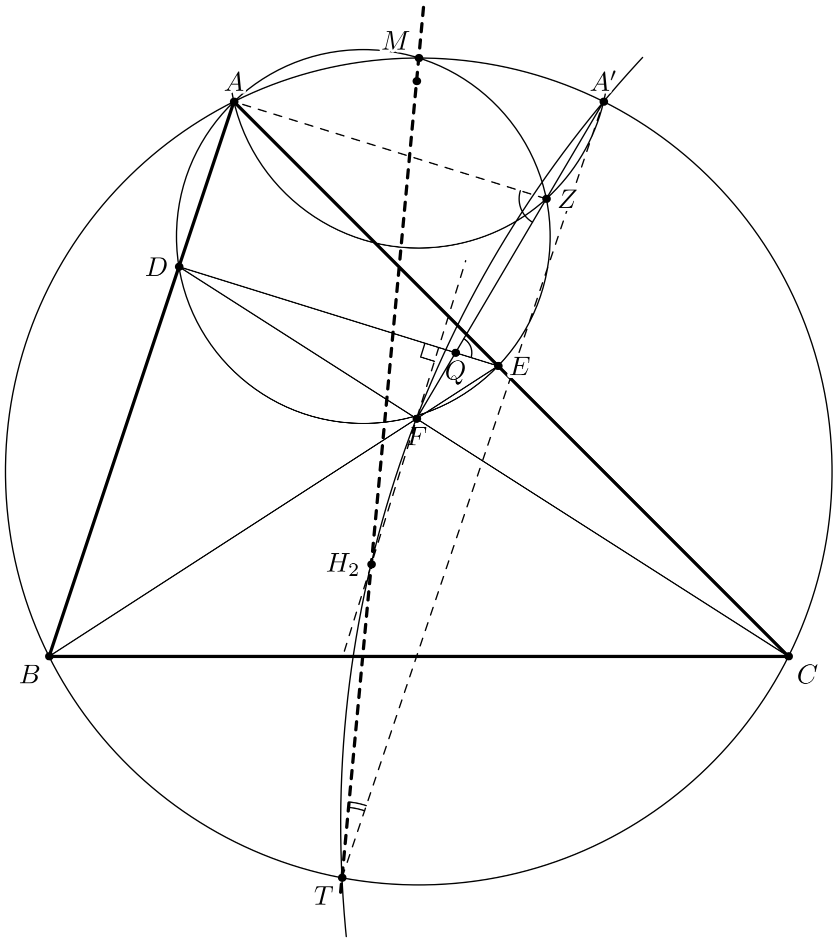

Рис. 5

Після підстановки отримуємо, що потрібно довести рівність

$$\frac{\sin\angle DEC\cdot CE}{\sin\angle DVC\cdot VC}\cdot\frac{AE}{AD}\cdot\frac{\sin\angle BVE\cdot VB}{\sin\angle BDE\cdot BD}=1.$$

За умовою $BD = CE$, а за твердженням 1 точка V лежить на серединному перпендикулярі до відрізка BC разом із точкою M. Тому $VB = VC$ і $\angle MVC = \angle MVB$. Крім того, як уже неодноразово сказано, M – середина дуги DAE кола γ, тому $\angle DVC = \angle BVE$. Тоді після спрощення отримуємо, що достатньо довести таке:

$$\frac{\sin\angle DEC\cdot AE}{\sin\angle BDE\cdot AD}=1,$$

що є простим наслідком теореми синусів для трикутника DAE. □

Доведення теореми 2. Нехай прямі FZ і DE перетинаються в точці Q (рис. 5). Внаслідок тверджень 1 і 2 $\angle DQF = \angle AZF = 180^\circ - \angle AZA' = \angle AMA'/2$. Тоді, оскільки $H_2F \perp DE$, $\angle A'FH_2 = 90^\circ + \angle DQF = 90^\circ + \angle AMA'/2$. З іншого боку, $\angle H_2TA' = \angle MTA' = \angle ATA'/2$. Звідси $\angle H_2TA' + \angle H_2FA' = 90^\circ + \angle AMA'/2 + \angle ATA'/2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, отже чотирикутник TH_2FA' вписаний. □

Нехай коло ω вдруге перетинає прямі AB і AC в точках X і Y (рис. 6).

Зауваження 2. Точки X, Y можна охарактеризувати й інакше. $\angle MYC = 180^\circ - \angle MYA = 180^\circ - \angle MAC = 180^\circ - \angle MCB = \angle MAB$. Також $\angle ABM = \angle ACM$. Отже, трикутники MAB і MYC

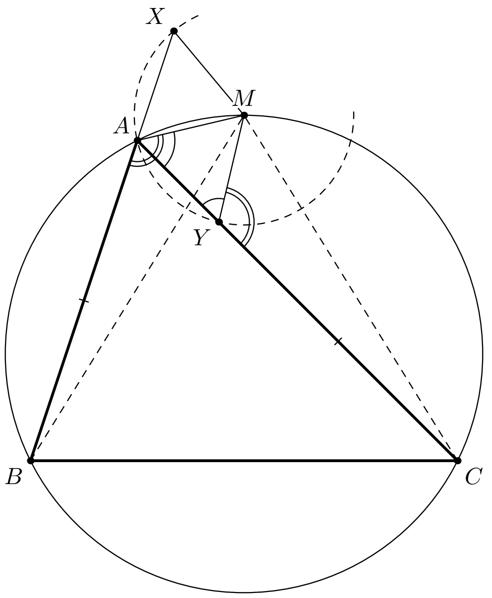

Рис. 6

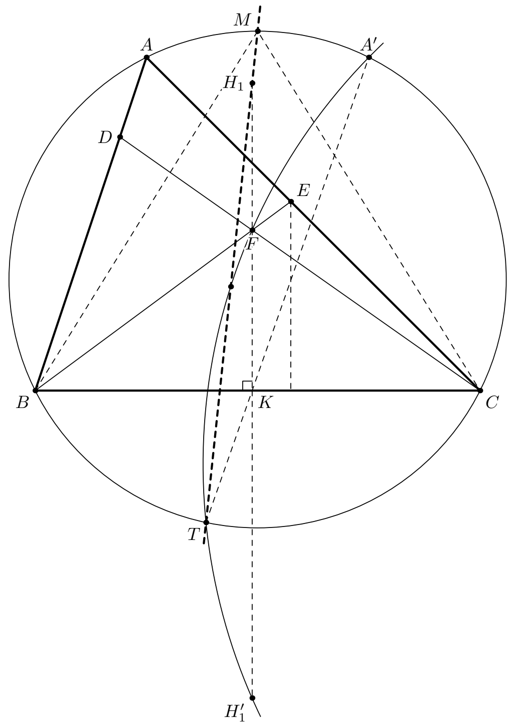

Рис. 7

подібні за двома кутами, а оскільки $AM = MY$, то вони рівні. Аналогічно, трикутники BXM і MAC рівні. Звідси X – така точка на BA, що $BX = CA$, а Y – така точка на CA, що $CY = BA$. Тобто точки X і Y є *крайніми положеннями* точок D і E, коли одна з цих точок збігається з вершиною A. Справді, точки D та E обираються на BA і CA довільним чином, але так, щоби задовольняти умову $BD = CE$, тож, якщо брати $D = A$, то $E = Y$, а якщо $E = A$, то $D = X$. Останнє є скоріше філософським аргументом, хоча б тому, що ми обмежилися розгляданням точок D і E всередині відрізків BA, CA, але цей аргумент висвітлює природу точок X, Y.

Наша остаточна мета: довести наступну теорему.

Нехай K – основа висоти трикутника BFC, що проведена з вершини F (рис. 7).

Теорема 3. *Пряма TA' проходить через точку K.*

Твердження 3. *Пряма XY проходить через середину відрізка H_1H_2.*

Доведення. Покажемо, що

$$\frac{\sin\angle BTK}{\sin\angle KTC} = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}.$$

Якщо виконується ця рівність, то, оскільки $\angle BTK + \angle KTC = \angle B + \angle C$, за відомим фактом $\angle BTK = \angle B$, звідки випливає, що пряма TK проходить через A' (рис. 7).

За теоремою синусів, застосованою до трикутників BKT, TKC,

$$\frac{\sin\angle BTK}{BK} = \frac{\sin\angle BKT}{BT},$$
$$\frac{\sin\angle KTC}{KC} = \frac{\sin\angle CKT}{TC},$$

звідки

$$\frac{\sin\angle BTK}{\sin\angle KTC} = \frac{TC}{KC}\cdot\frac{BK}{BT} = \frac{\sin\angle H_1MC}{\sin\angle BMH_1}\cdot\frac{BK}{KC}.$$

Із теореми синусів, застосованої до трикутників MBH_1, MH_1C,

$$\frac{\sin\angle BMH_1}{BH_1} = \frac{\sin\angle MBH_1}{MH_1},$$
$$\frac{\sin\angle H_1MC}{H_1C} = \frac{\sin\angle MCH_1}{MH_1}.$$

Легко перевірити, що

$$\frac{BK}{BH_1} = \sin\angle FCB, \quad \frac{CK}{CH_1} = \sin\angle FBC.$$

Із цього всього виводимо, що

$$\frac{\sin\angle BTK}{\sin\angle KTC} = \frac{\sin\angle CMH_1}{\sin\angle H_1MB}\cdot\frac{BK}{KC} = \\ = \frac{\sin\angle MCH_1}{\sin\angle MBH_1}\cdot\frac{CH_1}{BH_1}\cdot\frac{BK}{CK} = \\ = \frac{\sin\angle MCH_1}{\sin\angle MBH_1}\cdot\frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle FBC}.$$

Чому дорівнюють кути $\angle MBH_1$ і $\angle MCH_1$? Виконаємо їх підрахунок, позначивши $\alpha = \angle A/2$:

$$\angle MBH_1 = \angle MBC - \angle H_1BC = \\ = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - \angle FCB) = \angle FCB - \alpha.$$

Аналогічно $\angle MCH_1 = \angle FBC - \alpha$. Таким чином, застосовуючи тригонометричні формули,

$$\frac{\sin\angle BTK}{\sin\angle KTC} = \frac{\sin(\angle FBC-\alpha)/\sin\angle FBC}{\sin(\angle FCB-\alpha)/\sin\angle FCB} = \\ = \frac{\cos\alpha - \cot\angle FBC\sin\alpha}{\cos\alpha-\cot\angle FCB\sin\alpha}.$$

Легко бачити із трикутника, утвореного точками B, E і проекцією E на BC, що

$$\cot FBC = \frac{BC - CE\cos\angle C}{CE\sin\angle C}.$$

Аналогічно

$$\cot FCB = \frac{BC - BD\cos\angle B}{BD\sin\angle B}.$$

Достатньо довести, що

$$(\cos\alpha - \cot\angle FBC\sin\alpha)\cdot\sin\angle C = \\ = (\cos\alpha - \cot\angle FCB\sin\alpha)\cdot\sin\angle B,$$

або, після підстановки котангенсів,

$$\sin\angle C\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\frac{BC - CE\cos\angle C}{CE} = \\ = \sin\angle B\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\frac{BC-BD}{BD\sin\angle B}.$$

З урахуванням умови $CE = BD$ ця рівність рівносильна

$$\sin\angle C\cos\alpha + \cos\angle C\sin\alpha = \\ = \sin\angle B\cos\alpha + \cos\angle B\sin\alpha,$$

або

$$\sin(\angle C + \alpha) = \sin(\angle B + \alpha),$$

яка є очевидною, бо

$$\angle C + \alpha + \angle B + \alpha = 180^\circ. \qquad \square$$

Твердження 4. *Точка, що є симетричною до H_1 відносно BC, належить описаному колу точок T, H_2, F, A' (див. теорему 2).*

Доведення. Позначимо через H_1' точку, симетричну H_1 відносно BC (рис. 7). Тоді $H_1K = KH_1'$. Як відомо, $KF\cdot KH_1 = KB\cdot KC$, тобто $H_1'K\cdot KF = BK\cdot KC$. Зрозуміло, що $BK\cdot KC = TK\cdot KA'$. Отже, $TK\cdot KA' = KF\cdot KH_1'$, тобто точки A', F, T, H_1' лежать на одному колі. $\square$

Твердження 5. *Пряма XY проходить через F.*

Доведення. Застосуємо обернене твердження теореми Менелая для трикутника BAE і точок X, Y, F (рис. 8). Достатньо довести, що

$$\frac{BX}{XA}\cdot\frac{AY}{YE}\cdot\frac{EF}{FB} = 1.$$

З іншого боку, згідно із теоремою Менелая для трикутника ABE і прямої DC,

$$\frac{EF}{FB}\cdot\frac{BD}{DA}\cdot\frac{AC}{CE} = 1.$$

Підставимо значення EF/FB у рівність, яку хочемо довести:

$$\frac{BX}{XA}\cdot\frac{AY}{YE}\cdot\frac{DA}{BD}\cdot\frac{CE}{AC} = 1.$$

За умовою $BD = CE$, а згідно із зауваженням 2, $BX = AC$, $AY = AX$, $AD = YE$, тобто ліва частина попередньої рівності справді рівна 1. $\square$

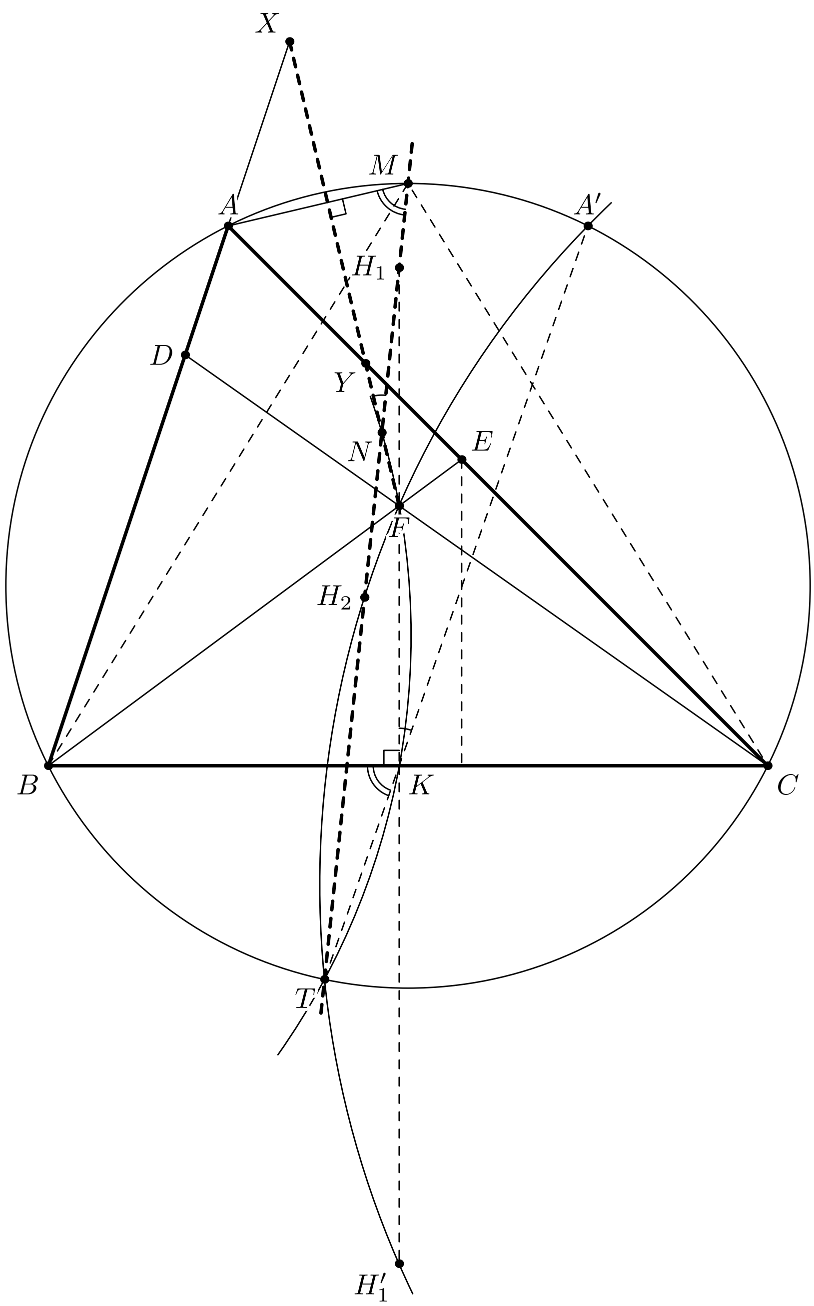

Рис. 8

Нехай пряма XY перетинає H_1H_2 в точці N.

Твердження 6. *Точки T, K, F, N належать одному колу.*

Доведення. Зрозуміло, що AM – бісектриса зовнішнього кута при вершині A, $XA = XB - AB = AC - CY = AY$ (див. рис. 6 і зауваження 1), тобто трикутник XAY рівнобедрений. Тоді бісектриса AM кута XAY є також висотою в цьому трикутнику. Тому $XY \perp AM$. Звідси, враховуючи те, що X, Y, F колінеарні, $\angle FNT = 90^\circ - \angle AMT = 90^\circ - \angle BCT - \angle A'TC = 90^\circ - \angle BKC = \angle FKA' = 180^\circ - \angle FKT$, тобто точки T, K, F, N лежать на одному колі (рис. 8). □

Доведення теореми 3. Маємо два кола: коло, на якому лежать точки H_1', T, H_2, F, A'; а також коло, на якому лежать T, K, F, N (рис. 8). Обчислимо степінь точки H_1 відносно цих двох кіл: $H_1N \cdot H_1T = H_1F \times H_1K$, $H_1H_2 \cdot H_1T = H_1F \cdot H_1H_1'$. Однак $H_1H_1' = 2H_1K$, звідки маємо рівність $H_1F \cdot H_1H_1' = 2H_1F \cdot H_1K$, а тому $H_1H_2 \times H_1T = 2H_1N \cdot H_1T$, тобто $H_1H_2 = 2H_1N$. Отже, N – середина H_1H_2. □

Література

[1] European Girls' Mathematical Olympiad 2014, Antalya, Turkey: Problems and Solutions [Електронний ресурс]. – Режим доступу : `http://egmo2014.tubitak.gov.tr/index.html`

[2] Материалы занятий кружков Ф. А. Ивлева: Линейность-1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : `http://geometry.ru/materials/kruzhki_big.php`

[3] *Полянский А.* Воробьями по пушкам / А. Полянский // Квант. – 2012. – № 2.

[4] Материалы занятий кружков А. Полянского: Воробьями по пушкам и окрестности [Электронный ресурс]. – Режим доступа : `http://geometry.ru/materials/kruzhki_big.php`