Про середини висот трикутника

Хілько Данило

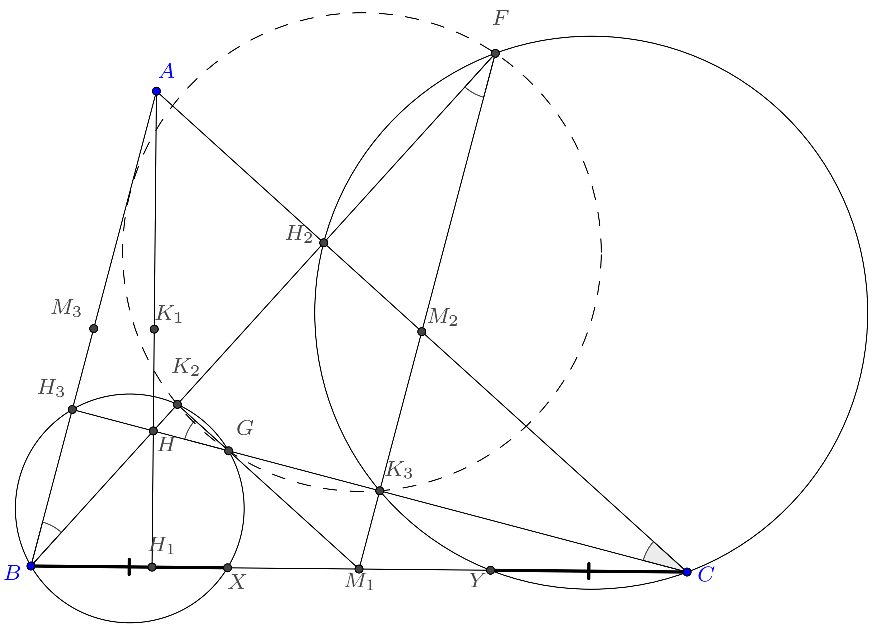
Середини висот трикутника не часто з'являються в конструкціях геометричних задач. Однак, ці точки безпосередньо пов'язані з іншими чудовими точками трикутника, тому, ймовірно, мають цікаві властивості. Ми спробували з'ясувати та описати їх.

Пропонуючи свій погляд на цю геометричну конструкцію, ми представляємо цикл оригінальних задач. Сподіваємося, що ці задачі не тільки допоможуть читачу посилити свої навички у розв'язанні геометричних задач, але й надихнуть на власні дослідження.

Для простоти всі розв'язання наведено для тих розташувань точок, які зображені на рисунках. Але це не єдині можливі конфігурації. Проте всі доведення можна перекласти на мову орієнтованих кутів, що дає можливість не розглядати варіанти розташування точок. Докладніше про орієнтовані кути можна прочитати тут [1].

Нехай ABC — гострокутний трикутник, точки K_1, K_2, K_3 середини його висот AH_1, BH_2, CH_3, а M_1, M_2, M_3 — середини сторін BC, CA, AB відповідно.

Задача 1. *Описане коло трикутника BK_2H_3 вдруге перетинає сторону BC в точці X, а описане коло трикутника CH_2K_3 вдруге перетинає сторону BC в точці Y. Доведіть, що $BX = CY$.*



Розв'язання. Нехай точка M_1 — середина сторони BC (рис. 1). Тоді з властивості середньої лінії трикутника $K_2M_1 \parallel AC$ і $M_1K_3 \parallel AB$, а тому $K_2M_1 \perp BH_2$, а $M_1K_3 \perp CH_3$. Нехай тоді $K_2M_1 \cap CH_3 = G$ і $M_1K_3 \cap BH_2 = F$. Чотирикутники BH_3K_2G та CK_3H_2F вписані, оскільки $\angle GK_2B = \angle GH_3B = \angle CK_3F = \angle CH_2F = 90°$, звідки $M_1X \cdot M_1B = M_1G \cdot M_1K_2$, а $M_1K_3 \cdot M_1F = M_1Y \cdot M_1C$. Крім того, як відомо чотирикутник BH_3H_2C вписаний. Тому $180° - \angle K_3GH_3 = \angle H_3GK_2 = \angle H_3BK_2 = \angle H_3BH_2 = \angle H_3CH_2 = \angle K_3CH_2 = \angle K_3FH_2 = \angle K_3FK_2$, тобто $\angle K_3GK_2 + \angle K_3FK_2 = 180°$, отже чотирикутник GK_2FK_3 вписаний. Тоді $M_1G \cdot M_1K_2 = M_1K_3 \cdot M_1F$, а тому $M_1X \cdot M_1B = M_1G \cdot M_1K_2 = M_1K_3 \cdot M_1F = M_1Y \cdot M_1C$. Оскільки M_1

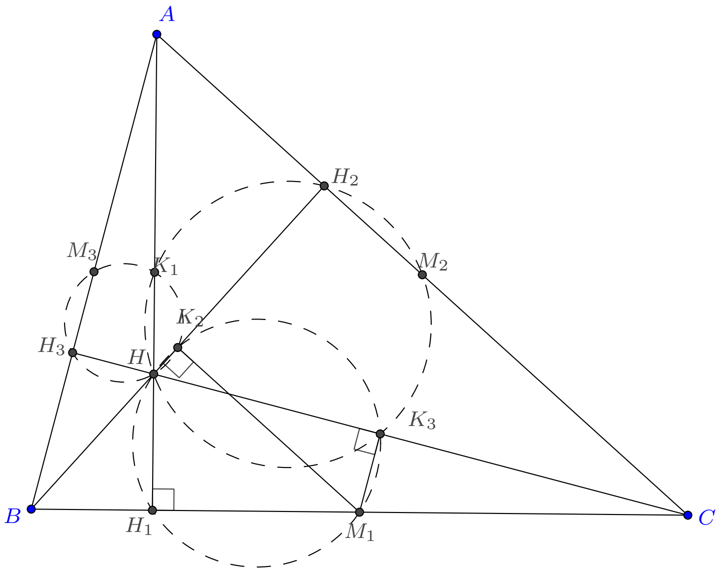
— середина сторони BC, то $M_1B = M_1C$. Тоді, розділивши рівність на половину сторони BC, отримуємо $M_1X = M_1Y$, звідки $BX = CY$. □

Тепер розглянемо прямі XK_2 та YK_3.

Задача 2. *Прямі XK_2 и K_3Y перетинаються в середині высоти трикутника ABC, що проведена з вершини A.*

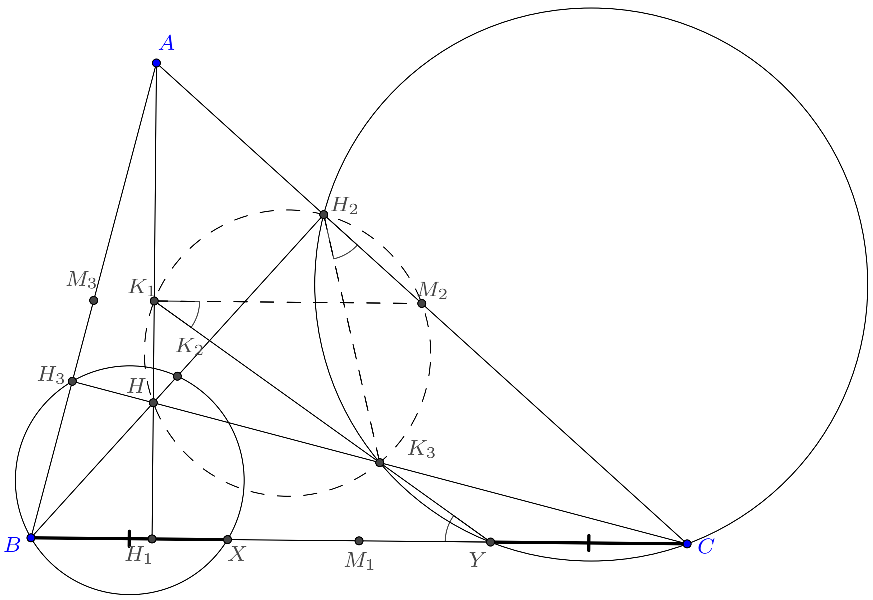
Для того, щоб довести цей факт, доведемо лему, яка знадобиться нам і надалі.

Лема 1. *Середини висот CH_3 и BH_2 (точки K_3 і K_2), ортоцентр H трикутника ABC, основа H_1 висоти AH_1 і точка M_1, що є серединою сторони BC, лежать на одному колі.*



Доведення. Як вже було зазначено у розв'язанні Задачі 1, $M_1K_3 \parallel AB$ та $M_1K_2 \parallel AC$, а тому $M_1K_2 \perp BH_2$ та $M_1K_3 \perp CH_3$ (рис. 2). Очевидно, що $H_1M_1 \perp AH_1$. Тоді точки K_2, H_1 і K_3 лежать на колі ω_1 з діаметром HM_1. Аналогічно доводиться вписаність п'ятикутників $HH_3M_3K_1K_2$ і $HK_1H_2M_2K_3$. Позначимо їх описані кола через ω_3 та ω_2 відповідно. □

Перейдемо до доведення твердження Задачі 2.

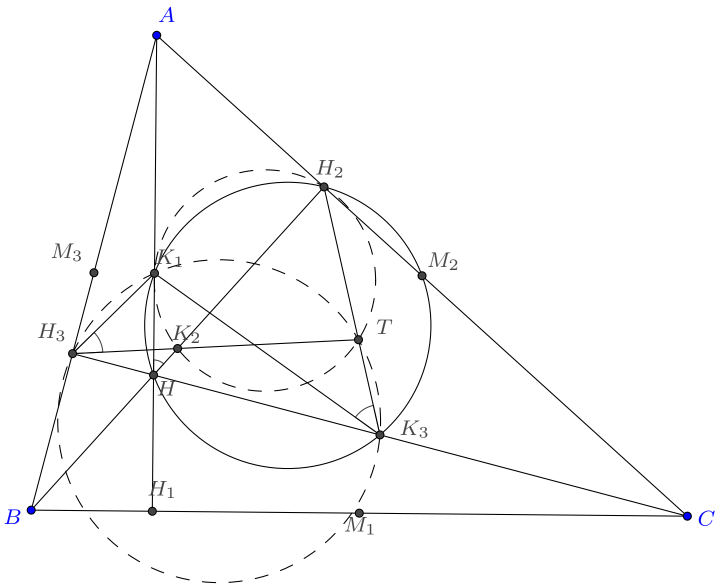


Очевидно, достатньо довести, що кожна з прямих $XK_2,\ YK_3$ проходить через середину AH_1 — точку K_1. Доведемо, що YK_3 проходить через K_1. Те, що XK_2 проходить через K_1 доводиться аналогічно.

Розв'язання Задачі 2. З вписаності чотирикутника H_2K_3YC випливає $\angle K_3H_2C = \angle K_3YB$ (рис.3). З іншої сторони, з вписаності $K_3K_1H_2M_2$ отримуємо $\angle K_3H_2C = \angle K_3H_2M_2 = \angle K_3K_1M_2$. Тому $\angle K_3YB = \angle K_3K_1M_2$. Отже, з паралельності K_1M_2 і BY випливає, що прямі K_1K_3 та K_3Y співпадають. □

Нехай прямі H_3K_2 та H_2K_3 перетинаються в точці T.

Задача 3. *Четвірки точок $H_3,\ K_1,\ T,\ K_3$ та $H_2,\ K_1,\ K_2,\ T$ циклічні.*

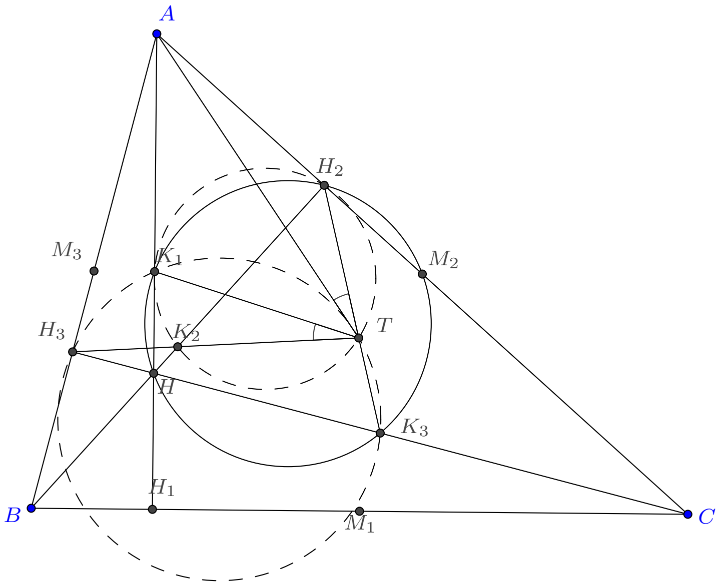


Розв'язання. За Лемою 1 четвірки точок K_1, H, K_3, H_2 та K_1, H_3, H, K_2 маємо $\angle K_1K_3H_2 = \angle K_1HH_2$ та $\angle K_1HK_2 = \angle K_1H_3K_2$ (рис. 4). Звідси, $\angle K_1H_3T) = \angle K_1H_3K_2 = \angle K_1HK_2 = \angle K_1HH_2 = \angle K_1K_3H_2 = \angle K_1K_3T$. Отже,

$$\angle K_1H_3T = \angle K_1K_3T,$$

звідки $H_3,\ K_1,\ T,\ K_3$ лежать на одному колі. Аналогічно доводиться те, що точки $H_2,\ K_1,\ K_2,\ T$ лежать на одному колі. □

Задача 4. $\angle H_3TK_1 = \angle H_2TA$, *тобто прямі K_1T та AT симетричні відносно бісектриси кута $\angle H_3TH_2$.*



Розв'язання. Позначимо $\angle H_3TA = \alpha$, $\angle ATH_2 = \beta$. Щоб довести, що $\alpha = \angle K_1TH_2$ і $\beta = \angle H_3TK_1$ (рис. 5), доведемо рівність

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin K_1TH_2}{\sin K_1TH_3}.$$

Рівність кутів випливає з цього, бо $\angle K_1TH_2 + \angle H_3TK_1 = \angle H_3TH_2 = \alpha + \beta$.

Справді, з вписаностей чотирикутників, отриманих в попередніх задачах, $\angle K_1TH_3 = \angle K_1K_3H_3 = \angle K_1K_3H = \angle K_1M_2H$. Аналогічно, $\angle K_1TH_2 = \angle K_1K_2H_2) = 180° - \angle K_1K_2H = \angle K_1M_3H$. Отже,

$$\frac{\sin\angle K_1TH_2}{\sin\angle K_1TH_3} = \frac{\sin\angle K_1M_3H}{\sin\angle K_1M_2H}.$$

Оскільки $M_2M_3 \perp AH_1$,

$$\frac{\sin\angle K_1M_3H}{\sin\angle K_1M_2H} = \frac{K_1H/M_3H}{K_1H/M_2H} = \frac{M_2H}{M_3H}.$$

З іншої сторони, з теореми синусів для трикутників AH_2T і AH_3T маємо

$$\frac{AT}{\sin\angle AH_3T} = \frac{AH_3}{\sin\alpha},$$

і

$$\frac{AT}{\sin\angle AH_2T} = \frac{AH_2}{\sin\beta}.$$

Звідси,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AH_3}{AH_2}\cdot\frac{\sin\angle AH_3T}{\sin\angle AH_2T}.$$

Далі, $\angle AH_3T) = \angle M_3H_3K_2$, $\angle AH_2T = \angle M_2H_2K_3$. Тому

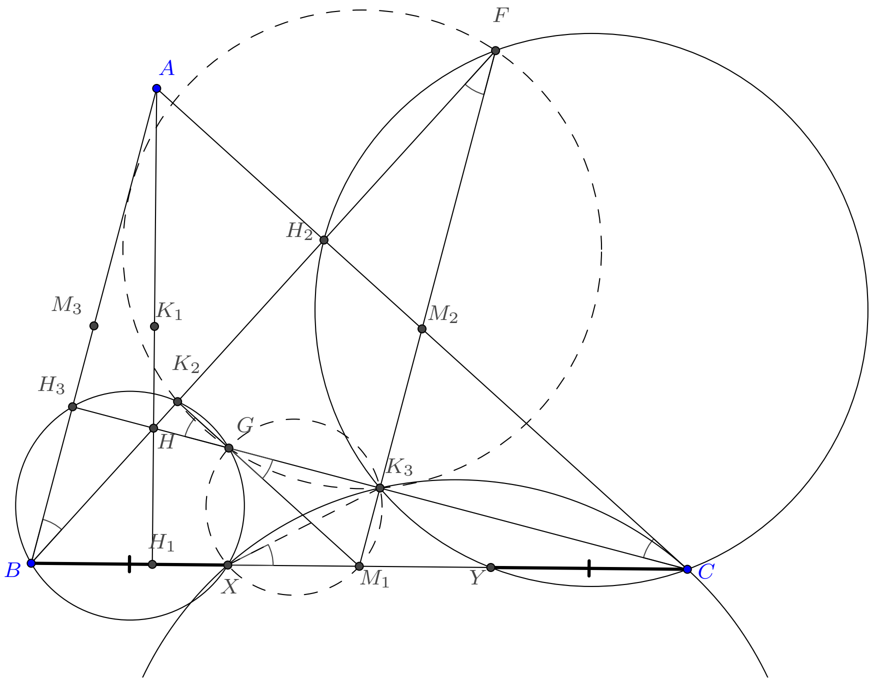
$$\frac{AH_3}{AH_2}\cdot\frac{\sin\angle AH_3T}{\sin\angle AH_2T} = \frac{M_2K_3}{M_3K_2}\cdot\frac{\sin\angle M_3H_3K_2}{\sin\angle M_2H_2K_3}.$$

Остаточно, рівність

$$\frac{M_2H}{M_3H} = \frac{M_2K_3}{M_3K_2}\cdot\frac{\sin\angle M_3H_3K_2}{\sin\angle M_2H_2K_3},$$

випливає з теореми синусів, застосованої до кіл ω_2 і ω_3 (M_2H та M_3H — діаметри кіл ω_2 і ω_3, тому $M_2H\cdot\sin\angle M_2H_2K_3 = M_2K_3$, $M_3H\cdot\sin\angle M_3H_3K_2 = M_3K_2$). $\square$

Задача 5. *Описане коло трикутника K_3XC дотикається до прямої AC в точці C.*

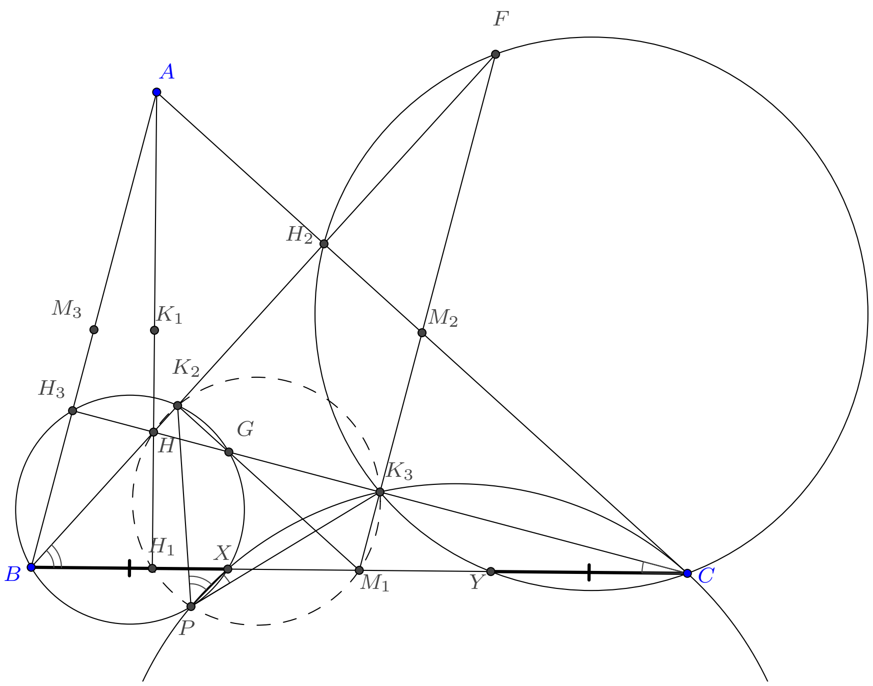


Розв'язання. В розв'язанні Задачі 1 було доведено, що перетин K_2M_1 та висоти, що проведена з вершини C (рис. 6), лежить на описаному колі трикутника BH_3K_2. Розглянемо цю точку G. Як відомо, $\angle H_3CH_2 = \angle H_3BH_2$. Крім того, $\angle H_3BK_2 = \angle H_3GK_2 = \angle K_3GM_1$. Зазначимо, що $\angle BH_3G = \angle GXB = \angle GXM_1 = 90°$, а також $K_3M_1 \parallel CH_3$, тобто $\angle GK_3M_1 = 90°$. Отже, чотирикутник XGK_3M_1 вписаний, звідки $\angle K_3GM_1 = \angle K_3XM_1$. Оскільки $K_2M_1 \parallel AC$, то $\angle GCA = \angle K_3GM_1$. Тоді $\angle K_3XM_1 = \angle H_3CH_2$, а тому описане коло трикутника K_3XC дотикається до прямої AC в точці C. □

Аналогічно, описане коло трикутника BK_2Y дотикається до прямої AB в точці B. Позначимо це коло через ω_B, а описане коло трикутника CK_3X — через ω_C.

Нехай описане коло чотирикутника BH_3K_2X вдруге перетинає ω_C в точці P, а описане коло чотирикутника CH_2K_3Y вдруге перетинає ω_B в точці Q.

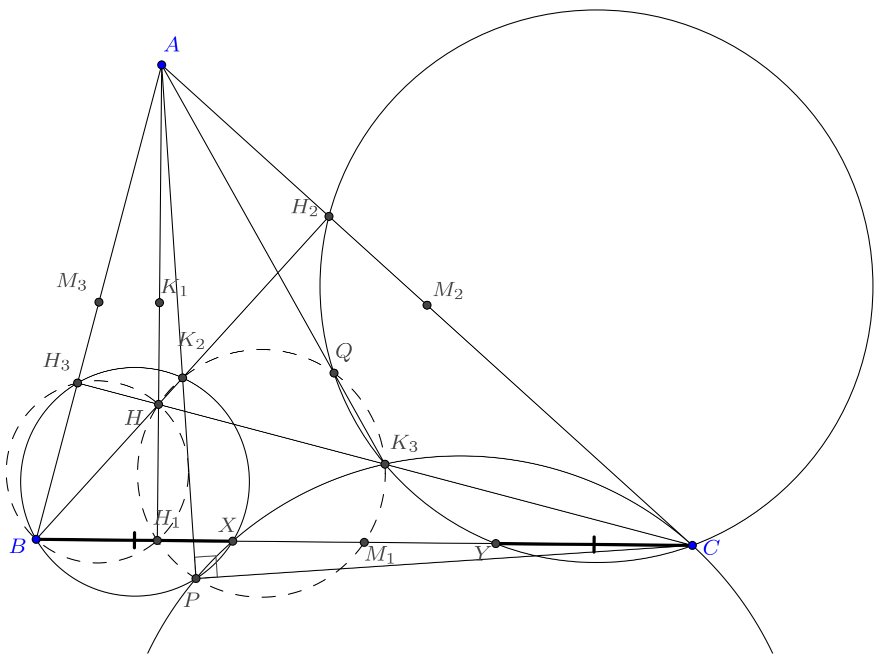
Задача 6. *Точки P і Q належать колу ω_1.*



Розв'язання. Доведемо твердження для точки P (рис. 7). Доведення для точки Q буде цілком аналогічним.

Справді, $\angle XPK_3 = \angle XCK_3$ та $\angle K_2PX = \angle K_2BX$). Звідси $\angle K_2PK_3 = \angle K_2PX + \angle XPK_3) = \angle K_2BX + \angle XCK_3 = \angle HBC + \angle HCB = \angle K_2HK_3$. Отже, точки $K_2,\ K_3,\ P,\ H$ лежать на одному колі, тобто P лежить на колі ω_1. □

Наслідок 1. *Точки A, K_2 і P лежать на одній прямій. $\angle APC = \angle H_1PX = 90°$.*

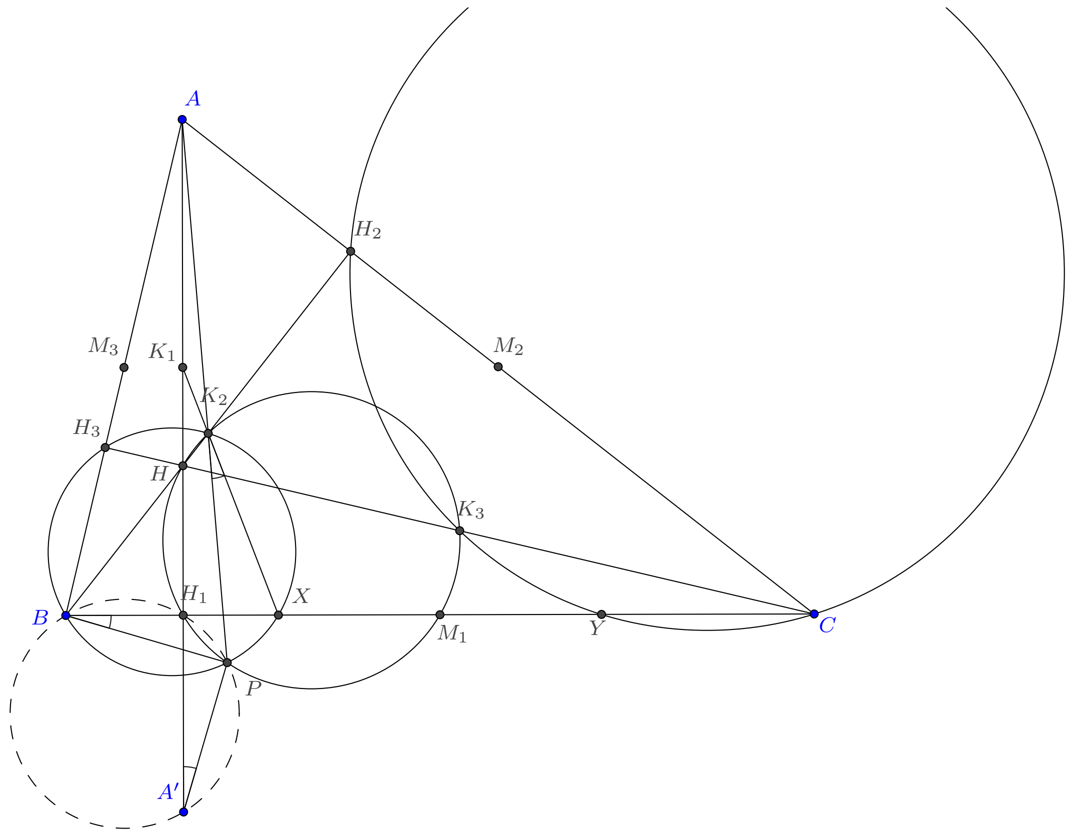


Розв'язання. Розглянемо чотирикутник HH_3BH_1 (рис. 8). Очевидно, він вписаний. Тоді радикальною віссю ω_1 та описаного кола чотирикутника HH_3BH_1 є HH_1, а ω_A та описаного колом трикуника BH_3K_2 є PK_2. Очевидно, радикальна вісь описаних кіл чотирикутників BH_3K_2P та HH_3BH_1 — пряма BH_3. Тоді, як відомо, ці три радикальні вісі перетинаються в одній точці, тому точки $A,\ K_2,\ P$ лежать на одній прямій. Далі, $\angle APC = \angle APK_3 + \angle K_3PC = \angle K_2HK_3 + \angle K_3CA = \angle H_2HC + \angle HCH_2 = 90°$. Отже, точки $A,\ H_1,\ P,\ C$ лежать на одному колі. Нарешті, $\angle H_1PX = \angle H_1PC - \angle CPX = 180° - \angle H_1AC + \angle ACX = \angle AH_1C = 90°$. □

Вправа 1. *Сформулюйте і доведіть твердження, аналогічні Наслідку 1, для точки Q.*

Нехай A' — точка, симетрична до A відносно H.

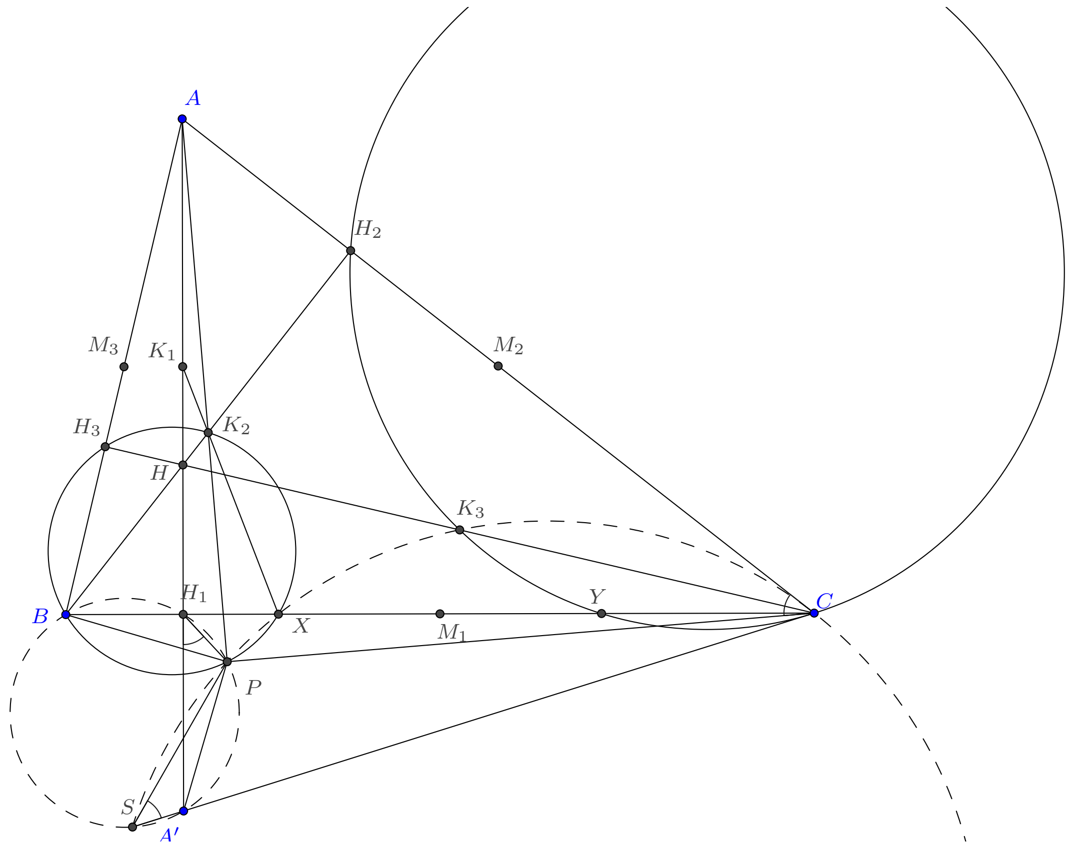
Задача 7. *Точки $B,\ H_1,\ P,\ A'$ лежать на одному колі.*



Доведення. За теоремою про січні, $AK_2 \cdot AP = AH \cdot AH_1$ (рис. 9). $AA' = 2AH,\ AH_1 = 2AK_1$. Звідси, $AH \cdot AH_1 = AA' \cdot AK_1$, тому за оберненою теоремою про січні чотирикутник K_1K_2PA' — вписаний. Тоді, оскільки точки $K_1,\ K_2,\ X$ лежать на одній прямій, то $\angle K_1A'P = \angle PK_2X$. Нарешті, $\angle PK_2X = \angle XBP$. Отже, $\angle H_1A'P = \angle H_1BP$, тобто точки $B,\ H_1,\ P,\ A'$ лежать на одному колі. □

Нехай CA' вдруге перетинає описане коло трикутника BH_1A' в точці S.

Задача 8. *Точка S належить колу ω_C.*



Розв'язання. Маємо $\angle A'H_1P = \angle A'SP$ (рис. 10). Також, оскільки чотирикутник AH_1PC вписаний, $\angle A'H_1P = \angle ACP$. Отже, $\angle A'SP = \angle ACP$. Тоді описане коло трикутника SPC дотикається до прямої AC в точці C, тобто S належить колу ω_C. □

Зазначимо, що аналогічні факти можна сформулювати про точку Q.

Вправа 2. *Сформулюйте і доведіть твердження, аналогічні Задачам 7-8, про точку Q.*

Задача 9. *Точка A' належить радикальній осі кіл ω_B та ω_C.*

Розв'язання. Доведемо, що степінь точки A' однаковий для обох кіл (рис. 10). З попередніх задач маємо, що

$$p(A', \omega_C) = SA' \cdot A'C$$

. За теоремою про січні для описаного кола чотирикутника $BH_1A'S$ $CS \cdot A'C = CH_1 \cdot CB$. Звідси,

$$\begin{aligned}SA' \cdot A'C &= CS \cdot A'C - A'C^2 = \\ &= CH_1 \cdot CB - A'C^2 = \\ &= BH_1 \cdot H_2C + H_2C^2 - A'C^2 = \\ &= BH_1 \cdot H_1C - A'H_1^2.\end{aligned}$$

Тобто

$$p(A', \omega_C) = BH_1 \cdot H_1C - A'H_1^2.$$

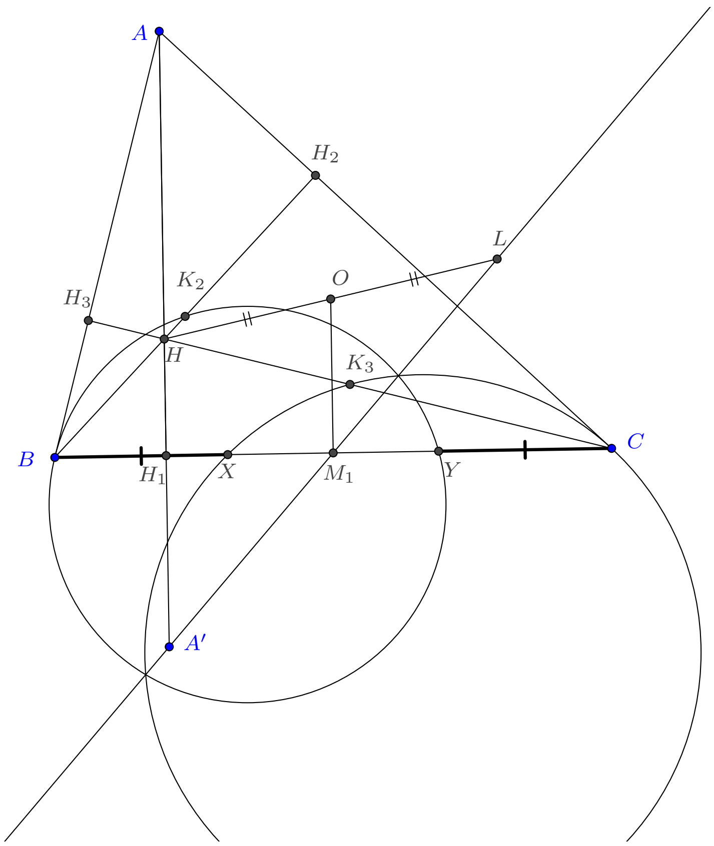
Помітимо, що останній вираз є *симетричним* відносно вершин B і C (тобто значення виразу не зміниться, якщо поміняти місцями вершини B і C). Отже, аналогічно порахувавши $p(A', \omega_B)$, отримаємо той самий вираз. Тому

$$p(A', \omega_B) = p(A', \omega_C).$$

□

Насамкінець, сформулюємо такий цікавий наслідок попередньої задачі.

Наслідок 2. *Радикальній осі кіл ω_B і ω_C належить точка* ***Де Лонгшампа (De Longchamps point)****, що визначається як симетрична точка до H відносно O, де O — центр описаного кола трикутника ABC.*



Доведення. З Задачі 1 випливає, що M_1 має однакову степінь відносно кіл ω_B та ω_C (дійсно, $XM_1 = M_1Y$, тому $p(M_1, \omega_B) = BM_1 \cdot M_1Y = XM_1 \cdot M_1C = p(M_1, \omega_C)$. З цього та попередньої задачі отримуємо, що пряма $A'M_1$ і є радикальною віссю кіл ω_B та ω_C. Розглянемо перетин $A'M_1$ з прямою Ейлера — точку L (рис. 11). Доведемо, що L — точка де Лонгшампа. Справді, як відомо, $AH = 2OM_1$. Також, $AH = HA'$. Трикутники $A'HL$ та M_1OL подібні, бо $A'H \parallel OM_1$. Тоді

$$\frac{LO}{LH} = \frac{OM_1}{HA'} = \frac{OM_1}{AH} = \frac{1}{2}.$$

Звідси, H та L симетричні відносно центру описаного кола ABC — точки O. $\square$

Докладніше про точку де Лонгшампа можна прочитати тут [2].

Задачі для самостійного розв'язання. У формулюваннях застосовуються позначенння з статті.

Задача 10. *Доведіть, що* $\angle K_1H_2Y = \angle K_1H_3X = 90°$.

Задача 11. *Доведіть, що точки* A, T, O *лежать на одній прямій, де* O *— центр описаного кола трикутника* ABC.

Задача 12. *Доведіть, що* $HM_1 \perp PQ$.

Задача 13. *Нехай прямі* PX *та* QY *перетинаються в точці* Z. *Доведіть, що* HZM_1H_1 *— прямокутник.*

Задача 14. *Доведіть, що прямі* $A'B$ *та* $A'C$ *дотикаються до описаних кіл трикутників* BH_3K_2 *та* CH_2K_3 *відповідно.*

Задача 15. *Точки* S, A', H_2, A *лежать на одному колі.*

Задача 16 (*). *Доведіть, що описані кола трикутників* $H_2K_1H_3, H_1K_3H_2, H_1K_2H_3$ *перетинаються в одній точці, що лежить на прямій Ейлера трикутника* ABC.

Також можуть бути цікавими наступні задачі, що не мають безпосереднього відношення до цієї статті, але в яких розглядаються схожі конструкції.

Задача 17 (Всеросійська математична олімпіада, 1995)**.** *Нехай точки* A_2, B_2, C_2 *— середини висот* AA_1, BB_1, CC_1 *гострокутного трикутника* ABC. *Знайдіть суму кутів* $B_2A_1C_2, A_2B_1C_2, B_2C_1A_2$.

Задача 18 (Московська математична олімпіада, 2001)**.** *Вписане коло гострокутного трикутника* ABC *з центром* I *дотикається до сторони* BC *в точці* K, *а зовнівписане коло трикутника* ABC *дотикається до сторони* BC *в точці* N. *Доведіть, що прямі* NI *та* JK *перетинаються в середині висоти трикутника* ABC, *проведеної з вершини* A.

Задача 19 (IMO Shortlist 2002, G7)**.** *Вписане коло* Ω *гострокутного трикутника* ABC *дотикається до сторони* BC *в точці* K. *Нехай* AD *— висота трикутника* ABC, *а* M *— середина цієї висоти. Пряма* KM *вдруге перетинає* Ω *в точці* N. *Доведіть, що вписане коло* Ω *та описане коло трикутника* BCN *дотикаються в точці* N.

Задача 20 (* А. Ангелеску, Gazeta Matematica 35, Румунія, [3])**.** *Нехай* K_1, K_2, K_3 *— середини висот* AH_1, BH_2, CH_3 *трикутника* ABC. *Пряма* K_2K_3 *перетинає сторони або продовження сторін* AB, AC *трикутника* ABC *в точках* B_A, C_A *і нехай* O_A *— центр описаного кола трикутника* AB_AC_A. *Визначимо аналогічно точки* O_B *та* O_C. *Доведіть, що точки* $K_1, K_2, K_3, O_A, O_B, O_C$ *лежать на одному колі.*

Література

[1] В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии.* М.: МЦНМО, 2006.

[2] Weisstein, Eric W. *de Longchamps Point. From MathWorld — A Wolfram Web Resource.* http://mathworld.wolfram.com/deLongchampsPoint

[3] D. Grinberg. *Midpoints of altitudes - a GM problem of Angelescu and more.* http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47 &t=41655